

# Modulární geometrie komplexního času: topologický selekční princip pro inflační parametr $\alpha$ -atraktoru

Adam Porybňý

Nezávislý výzkumník, Brno, Česká republika

2. července 2026 — verze 8

(data SPT-3G D1; post-CMB-S4 krajina; podsektory epistemologické robustnosti v Diskuzi)

(překlad anglického originálu *tau-geometry-v8-1.tex*)

## Abstract

Navrhujeme rámec, ve kterém je fyzikální čas komplexní proměnná  $\tau \in \mathbb{H}$  (horní polorovina) a foton je topologicky eliptická křivka s modulárním parametrem  $\tau$ . Pod jediným meta-postulátem strukturálního realismu (M0) — observables jsou funkce tříd izomorfie, ne reprezentantů — plyne modulární invariance vůči  $PSL(2, \mathbb{Z})$  jako věta. Invariance vůči  $PSL(2, \mathbb{R})$  fixuje metriku prostoru polí pouze až na celkovou škálu; kanonická normalizace (Gaussova křivost  $K = -1$  v Planckových jednotkách) je uvedena jako explicitní postulát N, jediný spojitý vstup rámce. Další explicitní postulát (A4, nový v této verzi) ztotožňuje prostor polí inflatonu se samotnou modulární časovou rovinou; označujeme ho jako nejméně nezávisle motivovaný předpoklad rámce. Za platnosti N a A4 je parametr  $\alpha$ -atraktoru fixován na  $\alpha = 2/3$  ( $3\alpha = 2$ , jedna z diskrétních benchmarkových hodnot), a T-modelový potenciál dává konzistenční relaci  $r = 2(1 - n_s)^2$ :  $r \approx 0,0025 \pm 0,0006$  pro Planck 2018,  $r \approx 0,0020 \pm 0,0004$  pro společnou datovou sadu SPT+Planck+ACT (CMB-SPA), a  $r \approx 0,0013\text{--}0,0017$  pro kombinace zahrnující BAO. Pokud je místo toho potenciál inflatonu sám vyžadován jako  $PSL(2, \mathbb{Z})$ -invariantní, je plató přibližováno dvojitě-exponenciálně v kanonickém poli a  $r$  je potlačeno na  $O(10^{-5})$ , zatímco  $n_s \simeq 1 - 2/N_e$  je zachováno, v souladu s  $SL(2, \mathbb{Z})$  atraktorovými analýzami Kallosa a Lindeho. LiteBIRD ( $\sigma(r) \approx 0,001$ ; start nyní plánován na JFY2036) zůstává experimentem, který rozliší mezi oběma větvemi; v bližším horizontu začíná Simons Observatory ( $\sigma(r) \approx 0,003$ ) sondovat horní část pásma větve A. Oddělení T-modelové větve od Starobinského  $R^2$  (poměr  $r_A/r_{\text{Star}} = 2/3$  při stejném  $n_s$ ) vyžaduje citlivost  $\sigma(r) \approx (3\text{--}5) \times 10^{-4}$ , cíl ponechaný bez financovaného nositele po zrušení CMB-S4 v červenci 2025. Sekce 7 reinterpretuje, nikoli odvozuje, hmotnostní defekt QCD nukleonu skrze projekci pozorovatele  $\mathcal{P}$ ; nepřináší žádnou novou numerickou predikci. Spekulativní výhled na entropickou gravitaci je přidán v sekci 8.2.

## Obsah

|          |                                           |          |
|----------|-------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>                               | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Rámec</b>                              | <b>3</b> |
| 2.1      | Meta-postulát M0 (strukturální realismus) | 3        |
| 2.2      | Proč komplexní čas                        | 3        |
| 2.3      | Fotonová topologie                        | 3        |
| 2.4      | Projekce pozorovatele                     | 4        |
| 2.5      | Normalizace                               | 4        |

|          |                                                                            |          |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>3</b> | <b>Modulární invariance jako věta</b>                                      | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>Fixace <math>\alpha = 2/3</math></b>                                    | <b>5</b> |
| 4.1      | Krok 1: metrika a křivost . . . . .                                        | 5        |
| 4.2      | Krok 2: plocha fundamentální domény . . . . .                              | 5        |
| 4.3      | Krok 3: fixace $\alpha$ . . . . .                                          | 5        |
| 4.4      | Krok 4: konzistenční relace a data . . . . .                               | 5        |
| <b>5</b> | <b>Efektivní akce a rozvětvení modulární invariance</b>                    | <b>6</b> |
| 5.1      | Větev A: T-modelový potenciál . . . . .                                    | 6        |
| 5.2      | Větev B: přísně modulárně invariantní potenciál . . . . .                  | 6        |
| <b>6</b> | <b>Srovnání modelů a testovatelnost</b>                                    | <b>6</b> |
| <b>7</b> | <b>Projekce pozorovatele jako reinterpretace hmotnostního defektu</b>      | <b>7</b> |
| <b>8</b> | <b>Diskuze</b>                                                             | <b>9</b> |
| 8.1      | Epistemologická robustnost: konzistenční relace versus pevný bod . . . . . | 9        |
| 8.2      | Výhled: gravitace jako entropická projekce . . . . .                       | 10       |

# 1 Úvod

Rámec  $\alpha$ -atraktorů [1, 2] poskytuje jednotný popis pomalého rolování (slow-roll) inflace na záporně zakřivených prostorech polí. Inflaton žije na hyperbolické varietě s křivostí prostoru polí  $K_{\text{fields}} = -2/(3\alpha)$ , a predikce vedoucího řádu jsou

$$n_s = 1 - \frac{2}{N_e}, \quad r = \frac{12\alpha}{N_e^2}, \quad (1)$$

kde  $N_e$  je počet e-foldů. Pro  $\alpha = 1$  dostáváme Starobinského model  $R^2$  [3].

Navzdory eleganci rámce zůstává  $\alpha$  volným parametrem ve všech dosavadních implementacích. Jeho hodnota je buď fitována na data, nebo volena vložím do string/M-teoretických konstrukcí, kde specifické kompaktifikace vybírají diskrétní hodnoty  $3\alpha \in \{1, \dots, 7\}$  [4, 5]. Kallosh a Linde nedávno vyvinuli kosmologie, v nichž kinetický člen i potenciál nesou plnou symetrii  $SL(2, \mathbb{Z})$  [6, 7, 8]; i tam je hodnota  $\alpha$  určena podkladovou string kompaktifikací, ne samotnou modulární geometrií.

V tomto článku navrhujeme selekční princip: jediný meta-postulát — strukturální realismus aplikovaný na pojem času — fixuje prostor polí jako modulární křivku  $X_1 = \mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$  s jeho hyperbolickou metrikou, a tím vybírá  $\alpha = 2/3$ . Jeden explicitní normalizační postulát (N) je potřeba k fixaci celkové škály metriky, a jeden explicitní identifikační postulát (A4) je potřeba k propojení této geometrie s kinetickým členem inflatonu; oba jsou spojitými a strukturálními vstupy rámce, a jako takové je uvádíme. Poté čelíme otázce, kterou musí řešit každá modulární kosmologie: zda potenciál inflatonu dědí plnou modulární invarianci. Dvě možné odpovědi definují dvě observačně rozlišitelné větve, obě falsifikovatelné.

## 2 Rámec

### 2.1 Meta-postulát M0 (strukturální realismus)

Fyzikální observables jsou funkce tříd izomorfie fyzikálních stavů, ne jejich reprezentantů. Pokud se dvě konfigurace liší jen izomorfismem své vnitřní struktury, žádné fyzikální měření mezi nimi nerozliší. Toto je stejný meta-předpoklad, jaký stojí v základu kalibrační teorie: observables faktorizují přes kalibrační orbity.

### 2.2 Proč komplexní čas

Fyzikální teorie popisující čas musí zohlednit nejen jednotlivé časové procesy (rotace, oscilace, fázový vývoj), ale i strukturu samotné rotace. Reálná proměnná  $t \in \mathbb{R}$  postačuje k parametrizaci jediné rotace; strukturální realismus (M0) vyžaduje popis třídy izomorfie rotačních struktur, ne jednotlivých instancí.

*Poznámka (jedinečnost  $\mathbb{C}$  mezi  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}_q$ ).* Mezi asociativními reálnými divizními algebry platí následující matematická fakta: (i)  $\mathbb{R}$  nenese žádnou konformní strukturu ani vnitřní rotační automorfismy; (ii) kvaterniony  $\mathbb{H}_q$  jsou nekomutativní, teorie holomorfních funkcí se na ně nerozšiřuje, a moduli prostory algebraických křivek — zejména eliptických křivek — jsou definovány nad  $\mathbb{C}$ ; neexistuje žádný kvaternionový analog modulární křivky  $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ ; (iii)  $\mathbb{C}$  je jediné komutativní, algebraicky uzavřené rozšíření  $\mathbb{R}$ , přirozeně vybavené konformní strukturou, která činí rotace automorfismy. Celý řetězec  $M0 \rightarrow \text{moduli prostor} \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z})$  je dostupný pouze nad  $\mathbb{C}$ .

Zdůrazňujeme, že tato poznámka je motivace, ne věta: pojem „struktury rotace“ není definován s přesností, jakou by vyžadoval důkaz jedinečnosti. Proto povyšujeme tento závěr na explicitní postulát.

**Postulát 1** (A1: komplexní čas). *Fundamentální časová proměnná je*

$$\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im } \tau > 0\}.$$

Omezení na  $\mathbb{H}$  odráží fyzikální požadavky:  $\text{Im } \tau > 0$  zajišťuje konvergentní partiční funkce a pozitivně definitní normy. Reálné observables jsou projekce, zrcadlící kvantovou mechaniku, kde jsou primární  $\mathbb{C}$ -hodnotové amplitudy a  $\mathbb{R}$ -hodnotové pravděpodobnosti odvozené.

### 2.3 Fotonová topologie

Vzhledem k jedinému komplexnímu modulu  $\tau$  klasifikace Riemannových ploch vyděluje rod  $g = 1$ : plochy rodu 0 nemají žádné moduly, plochy rodu  $g \geq 2$  mají  $3g - 3 \geq 3$  modulů, a jen tory mají moduli prostor komplexní dimenze přesně jedna. Toto je matematické fakt. Ztotožnění objektu rodu jedna s fotonem je fyzikální krok, motivovaný rolí fotonu jako neredukovatelného prostředníka měření a přenosu informace — nejjednoduššího fyzikálně netriviálního objektu (energie, hybnost, polarizace, fáze; žádná hmotnost, žádný náboj, žádná složená struktura), zaujímajícího v hierarchii fyzikálních objektů pozici, kterou eliptická křivka zaujímá mezi Riemannovými plochami.  $U(1)$  kalibrační symetrie fotonu přirozeně odpovídá jednomu ze dvou faktorů  $S^1$  toru; druhý kóduje vnitřní fázový cyklus parametrizovaný  $\text{Im } \tau$ .

**Postulát 2** (A2: fotonová topologie). *Foton je topologicky ztotožněn s  $S^1 \times S^1$  vybaveným komplexní strukturou  $\tau$ : eliptickou křivkou  $E_\tau \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ .*

## 2.4 Projekce pozorovatele

**Postulát 3** (A3: projekce pozorovatele). *Klasický pozorovatel nemá přístup ke globální komplexní fázi; extrahuje pouze  $\text{Stab}(i)$ -invariantní data modulární geometrie. Podél kanonické geodetiky  $\text{Re } \tau = 0$  se to redukuje na znaménkovou hyperbolickou vzdálenost od eliptického fixního bodu  $\tau = i$ ,*

$$\varphi(\tau) = \ln \tau_2, \quad \tau_2 \equiv \text{Im } \tau.$$

Makroskopický hodinový čas odpovídá  $\text{Re } \tau$ ; invariant  $\varphi$  bude níže hrát roli kanonicky normalizovaného inflatonu.

## 2.5 Normalizace

Grupa  $PSL(2, \mathbb{R})$  působí tranzitivně na  $\mathbb{H}$  s izotropií  $SO(2)$ ; prostor  $PSL(2, \mathbb{R})$ -invariantních Riemannových metrik je proto přesně jednoparametrický,

$$ds^2 = \lambda \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad \lambda > 0, \quad K = -\frac{1}{\lambda}. \quad (2)$$

Invariance fixuje tvar metriky, ne její škálu.

**Postulát 4** (N: normalizace). *Kinetická metrika efektivního prostoru polí je kanonická hyperbolická metrika,  $\lambda = 1$  v jednotkách  $M_{\text{Pl}}$ , tj.  $K = -1 M_{\text{Pl}}^{-2}$ .*

N je jediný spojitý vstup rámce; všechny numerické predikce níže jsou bezparametrické modulo N.

**Postulát 5** (A4: identifikace prostoru polí — **nové ve v6**). *Prostor polí inflatonu efektivní čtyřrozměrné teorie je ztotožněn s modulární časovou rovinou  $\mathbb{H}$  postulátu A1, vybavenou metrikou postulátu N. Ekvivalentně: tentýž geometrický objekt, který nese strukturu komplexního času, nese i kinetický člen inflatonu.*

Toto je nezávislý fyzikální postulát, ne důsledek A1–A3 a N. Je to minimální předpoklad, za nějž má modulárně-křivková geometrie sekce 4 vůbec nějaký vztah k inflačním observables; bez něj by  $\tau$  zůstal čistě kinematickou časovou proměnnou bez vztahu k  $(n_s, r)$ . Uvádíme ho zde explicitně, protože je to místo, kde se predikční nárok rámce a jeho ontologický nárok (komplexní čas) spojují fiatem, ne odvozením. Ze všech postulátů rámce nese A4 nejmenší nezávislou motivaci: je uveden pro svou predikční úspornost, ne odvozen. Budoucí verze by měla buď dodat argument pro A4, nebo přeformulovat predikční řetězec bez něj.

## 3 Modulární invariance jako věta

**Věta 1.** *Za platnosti M0 a komplexního času  $\tau \in \mathbb{H}$  s fotonovou topologií (A2) jsou fyzikální observables invariantní vůči  $PSL(2, \mathbb{Z})$ .*

*Náčrt důkazu.* Foton je eliptická křivka  $E_\tau$  parametrizovaná  $\tau \in \mathbb{H}$ . Podle klasické věty [10] je moduli prostor eliptických křivek nad  $\mathbb{C}$  roven  $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ : dva parametry  $\tau, \tau'$  dávají izomorfní křivky právě tehdy, když leží ve stejné  $PSL(2, \mathbb{Z})$ -orbitě. Podle M0 observables faktorizují přes třídy izomorfie; observables jsou proto  $PSL(2, \mathbb{Z})$ -invariantní funkce na  $\mathbb{H}$ .  $\square$

Grupa není postulována; vyplývá ze struktury automorfismů moduli prostoru.

## 4 Fixace $\alpha = 2/3$

### 4.1 Krok 1: metrika a křivost

Podle (2) a postulátu N je metrika prostoru polí Poincarého metrika  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$  s  $K = -1$ .

### 4.2 Krok 2: plocha fundamentální domény

Za platnosti N má fundamentální doména  $\mathcal{F}$  grupy  $PSL(2, \mathbb{Z})$  hyperbolickou plochu  $\text{Area}(\mathcal{F}) = \pi/3$ , z Gauss–Bonnetovy věty aplikované na orbifold  $X_1$  s Eulerovou charakteristikou  $\chi(X_1) = -1/6$ .

### 4.3 Krok 3: fixace $\alpha$

Křivost prostoru polí  $\alpha$ -atraktoru je  $K_{\text{fields}} = -2/(3\alpha)$  [1]. Podle postulátu A4 je prostor polí inflatonu časovou rovinou (sekce 2.5), takže  $K_{\text{fields}} \equiv K = -1$  a

$$\alpha = \frac{2}{3} = \frac{2 \text{Area}(\mathcal{F})}{\pi} = -4\chi(X_1). \quad (3)$$

Protože  $\chi$  je škálově invariantní, zatímco  $\text{Area}$  a  $K$  nejsou, jsou topologické formulace v (3) ekvivalentní postulátu N, ne na něm nezávislé: obecně  $\alpha = 2\lambda/3$ , a  $\lambda = 1$  je to, co N tvrdí. Hodnota  $3\alpha = 2$  se shoduje s jedním z diskrétních benchmarků string/M-teoretických konstrukcí [4, 5]; současný rámec poskytuje jeho vnitřní geometrickou selekci, podmíněnou A4.

### 4.4 Krok 4: konzistenční relace a data

Eliminací  $N_e$  z (1),

$$r = 3\alpha (1 - n_s)^2 \xrightarrow{N, A4} 2(1 - n_s)^2. \quad (4)$$

Primární predikcí je relace (4); numerická hodnota  $r$  je podmíněna naměřeným  $n_s$ :

| Datová sada                   | $n_s$               | $r = 2(1 - n_s)^2$  | $N_e = 2/(1 - n_s)$ |
|-------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Planck 2018 [11]              | $0.9649 \pm 0.0042$ | $0.0025 \pm 0.0006$ | $\approx 57$        |
| P-ACT (Planck+ACT DR6) [12]   | $0.9709 \pm 0.0038$ | $0.0017 \pm 0.0004$ | $\approx 69$        |
| CMB-SPA (SPT+Planck+ACT) [13] | $0.9684 \pm 0.0030$ | $0.0020 \pm 0.0004$ | $\approx 63$        |
| P-ACT-LB (+lensing, BAO) [12] | $0.9743 \pm 0.0034$ | $0.0013 \pm 0.0003$ | $\approx 78$        |
| CMB-SPA + DESI BAO [13, 14]   | $0.9728 \pm 0.0027$ | $0.0015 \pm 0.0003$ | $\approx 74$        |

Uvolnění SPT-3G D1 [13] posouvá centrální hodnotu  $n_s$  pouze z CMB dat *dolů* vzhledem ke kombinacím zahrnujícím ACT: společné omezení CMB-SPA,  $n_s = 0.9684 \pm 0.0030$ , leží mezi Planck 2018 a P-ACT, což implikuje  $N_e \approx 63$  — jen mírně nad standardním reheatingovým oknem ( $\approx 50$ – $60$ ). Silnější napětí vzniká při přidání BAO dat: kombinace zahrnující BAO dávají  $n_s \approx 0.973$ – $0.974$  a  $N_e \approx 74$ – $78$ , a upřednostňují na více než  $2\sigma$  hodnoty  $n_s$  preferované samotným Planckem [14]. Platí dvě výhrady. Za prvé, toto napětí se týká celé třídy  $\alpha$ -atraktorů v asymptotickém režimu (1) — včetně Starobinského  $R^2$  — ne specificky  $\tau$ -geometrie. Za druhé, vzestupný tah na  $n_s$  je řízen samotnými BAO daty, která jsou v  $2.8\sigma$  napětí s kombinovanými CMB experimenty v rámci  $\Lambda$ CDM [13]; dokud toto napětí není vyřešeno, měly by být řádky tabulky jen-CMB a zahrnující-BAO čteny jako ochraničující predikci, ne jako soupeřící měření.

## 5 Efektivní akce a rozvětvení modulární invariance

Kinetický sektor fixovaný sekcí 2.5 a Větou 1 je

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{(\partial\tau_1)^2 + (\partial\tau_2)^2}{\tau_2^2} - V(\tau) \right]. \quad (5)$$

Během inflace trajektorie sestupuje z cuspů podél  $\text{Re } \tau = 0$ , přičemž  $\tau_1$  je stabilizováno na plató [9]; kinetický člen se redukuje na  $-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$  pro kanonické pole  $\varphi = M_{\text{Pl}} \ln \tau_2$ . Potenciál je místo, kde rámec čelí skutečnému rozvětvení.

### 5.1 Větev A: T-modelový potenciál

Pokud je na projikované pole uvalena jen zbytková  $\mathbb{Z}_2$ , minimální potenciál plató je T-model

$$V(\varphi) = \Lambda^4 \tanh^2 \left( \frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha} M_{\text{Pl}}} \right) = \Lambda^4 \tanh^2 \left( \frac{\varphi}{2M_{\text{Pl}}} \right), \quad (6)$$

kde koeficient  $1/2$  je aritmetickým důsledkem  $\alpha = 2/3$ . Jeho predikce jsou (1) s  $\alpha = 2/3$ , tedy relace (4) a hodnoty v tabulce výše.

### 5.2 Větev B: přísně modulárně invariantní potenciál

Plně invariantní potenciál musí být funkcí modulárních invariantů, např.  $j(\tau)$  nebo kombinace  $\tau_2 |\eta(\tau)|^4$ , kde  $\eta$  je Dedekindova eta-funkce. Definujme invariantní výšku

$$H(\tau) = -\ln(\tau_2 |\eta(\tau)|^4). \quad (7)$$

Protože  $\ln |\eta(\tau)| \rightarrow -\pi\tau_2/12$  pro  $\tau_2 \rightarrow \infty$ ,

$$H(\tau) \simeq \frac{\pi}{3}\tau_2 - \ln \tau_2 = \frac{\pi}{3}e^{\varphi/M_{\text{Pl}}} - \frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}}, \quad (8)$$

což roste lineárně v  $\tau_2$ , tj. exponenciálně v kanonickém poli. V důsledku toho se libovolný potenciál plató  $V = F(H)$  blíží své asymptotě dvojitě-exponenciálně ve  $\varphi$  — jev analyzovaný Kallošem a Lindem v  $SL(2, \mathbb{Z})$  kosmologii [6, 7, 8].

Pro  $V = V_0(1 - ce^{-x})$  s  $x = be^{\varphi/M_{\text{Pl}}}$  dává standardní slow-roll analýza

$$n_s \simeq 1 - \frac{2}{N_e}, \quad r \simeq \frac{8}{x_*^2 N_e^2}, \quad e^{x_*} = \frac{12}{\pi} x_*^3 N_e, \quad (9)$$

takže  $x_* \approx 13.1$  pro  $N_e = 57$  a

$$r_B \approx 1.4 \times 10^{-5} \quad (N_e = 57), \quad r_B \approx 7 \times 10^{-6} \quad (N_e = 78). \quad (10)$$

Predikce (1) pro  $n_s$  je zachována, zatímco  $r$  klesá pod dosah LiteBIRD i CMB-S4.

## 6 Srovnání modelů a testovatelnost

| Model                      | $3\alpha$ | $r \ (n_s = 0.9649)$ | $r \ (n_s = 0.9684)$ | $r \ (n_s = 0.9743)$ |
|----------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\tau$ -geometrie, větev A | 2         | 0.0025               | 0.0020               | 0.0013               |
| $\tau$ -geometrie, větev B | 2         | $1.4 \times 10^{-5}$ | $1.2 \times 10^{-5}$ | $7 \times 10^{-6}$   |
| Starobinsky $R^2$          | 3         | 0.0037               | 0.0030               | 0.0020               |
| KL benchmark               | 1         | 0.0012               | 0.0010               | 0.0007               |
| KL benchmark               | 7         | 0.0086               | 0.0070               | 0.0046               |

Při pevném  $n_s$  platí poměr  $r_A/r_{\text{Star}} = 2/3$  nezávisle na  $n_s$ ; separace  $\Delta r = (1 - n_s)^2 \approx 0.0007 - 0.0012$  odpovídá  $0.7 - 1.2 \sigma$  pro LiteBIRD [19], takže plné odlišení od Starobinského modelu vyžaduje  $\sigma(r) \approx (3-5) \times 10^{-4}$ , tj. citlivost třídy CMB-S4 [20]. Otázka větve je naproti tomu rozhodnuta samotným LiteBIRD.

**Experimentální krajina (k polovině roku 2026).** Výše uvedená tvrzení o testovatelnosti musí být nyní čtena vůči podstatně změněné krajině. Dne 9. července 2025 DOE a NSF společně stáhly podporu pro CMB-S4 [17]; citlivost  $\sigma(r) \approx (3-5) \times 10^{-4}$  potřebná pro poměrový test  $r_A/r_{\text{Star}} = 2/3$  nyní nemá financovaného nositele, a tento test se stává dlouhodobějším cílem podmíněným nástupnickým programem. LiteBIRD, po odstoupení KEK z jeho původní hardwarové role a roční reformní studii, byl v září 2025 schválen ISAS/JAXA k pokračování, se startem nyní plánovaným na JFY2036 a revizí definice mise plánovanou na polovinu roku 2026 [18]; rozlišení větví A/B se tak posouvá do pozdních 2030. V mezích jsou nejcitlivějšími sondami Simons Observatory, již pozorující, s předpovědí  $\sigma(r) \approx 0.003$  [16], a BICEP Array; současné limity na  $B$ -módy jsou  $r < 0.036$  (95%, BK18) a  $r < 0.25$  z první analýzy  $B$ -módů SPT-3G [15]. Simons Observatory tak může začít zasahovat do horní části pásma větve A ( $r \approx 0.0025$  pro  $n_s$  podobné Planckovu), ale nemůže dosáhnout hodnot zahrnujících BAO  $r \approx 0.0013 - 0.0015$ . Větev A je proto falsifikovatelná, ale pro nižší rozsah predikcí závislých na  $n_s$  ne dříve než při LiteBIRD.

#### Kritéria falsifikace:

- $r > 0.01$ :  $\alpha = 2/3$  vyvráceno v obou větvích. (Testovatelné již nyní: Simons Observatory a BICEP Array.)
- $r$  detekováno v  $[0.001, 0.004]$ : režim větve A; poměrový test A-vs-Starobinsky pak vyžaduje nástupce třídy CMB-S4.
- Žádná detekce při LiteBIRD ( $r < 0.001$ ; pozdní 2030 v současném plánu): větev A vyvrácena pro  $n_s$  podobné Planckovu (hraniční pro  $n_s$  podobné ACT); větev B zůstává platná, pokud  $n_s$  sleduje  $1 - 2/N_e$  pro rozumné  $N_e$ .
- Formální chyba v řetězci  $M0 \rightarrow \text{Věta 1} \rightarrow (3)$ , nebo nezávislý důkaz fixující  $\lambda \neq 1$  (selhání N), nebo nezávislý důkaz proti A4.

## 7 Projekce pozorovatele jako reinterpretace hmotnostního defektu

Na úvod zdůrazňujeme, co tato sekce tvrdí a co netvrdí. Numerický obsah — gluonový podíl na hmotnosti nukleonu, rovnice (13) níže — je standardní výsledek QCD stopové anomálie a není zde odvozen; je importován z lattice QCD. Co následuje, je reinterpretace tohoto známého výsledku v jazyce projekce pozorovatele  $\mathcal{P}$  zavedené v postulátu A3. Tato sekce nepřináší žádnou novou numerickou predikci a není sama o sobě falsifikovatelná nezávisle na QCD vstupu, který reinterpretuje. Jejím účelem je strukturální test: zda se  $\mathcal{P}$ , motivovaná původně inflační kinematikou, koherentně rozšiřuje na druhý fyzikální kontext. Považujeme to za test plausibility A3, ne za důkaz ve prospěch A3.

Nechť  $\mathcal{H}$  je Hilbertův prostor fundamentálních (holých) QCD stavů, a nechť  $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{obs}}$  je operátor projekce pozorovatele (postulát A3). Definujeme operátor holé hmotnosti  $\hat{M}_0$  působící na holou kvarkovou substrukturu, a interakční operátor  $\hat{V}_{\text{gluon}}$  reprezentující gluonovou vazebnou energii. Měřený (projikovaný) operátor hmotnosti je pak

$$\hat{M}_{\text{obs}} = \mathcal{P} \left( \hat{M}_0 + \hat{V}_{\text{gluon}} \right) \mathcal{P}^\dagger. \quad (11)$$

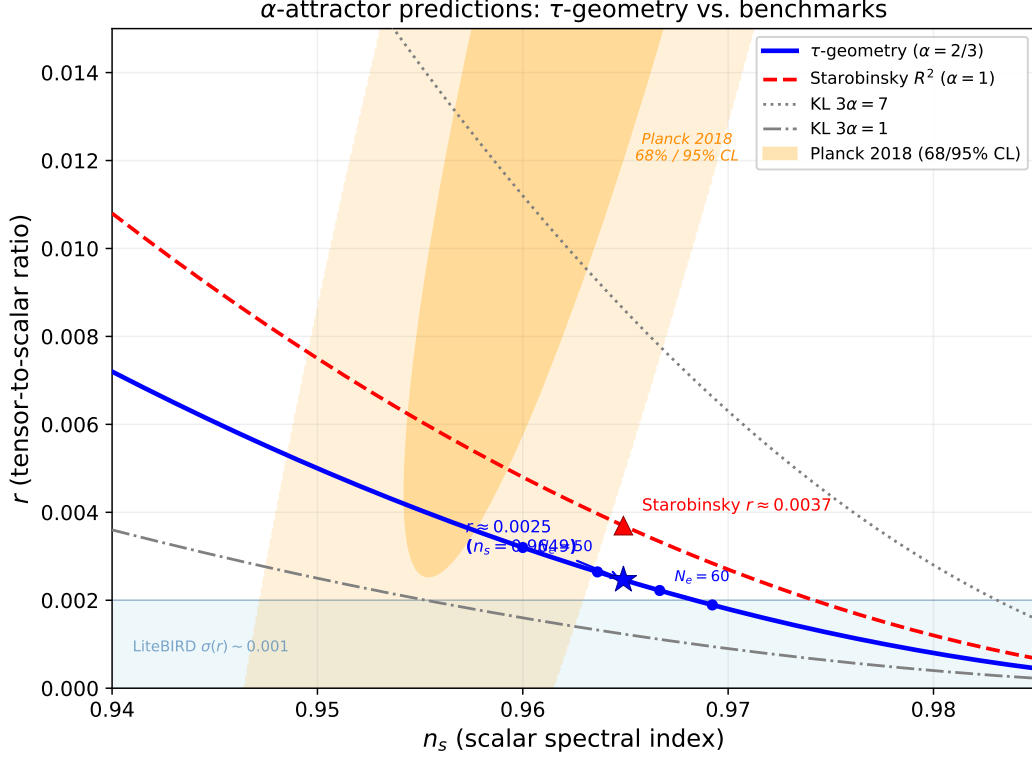


Figure 1: Predikce v rovině  $(n_s, r)$  (logaritmické  $r$ ). Větev A  $\tau$ -geometrie,  $r = 2(1 - n_s)^2$  (modrá, plná), Větev B s přísně modulárně invariantním potenciálem (modrá, čerchovaná), Starobinského  $R^2$  (červená, přerušovaná), a Kallosh–Lindeho benchmarky  $3\alpha = 1, 7$  (černá, tečkovaná). Hvězdy značí hodnoty větve A pro centrální  $n_s$  Planck 2018 a P-ACT-LB (šrafovaná vertikální pásma: 68% CL). Vodorovná čára ukazuje citlivost LiteBIRD  $\sigma(r) \approx 10^{-3}$ .

Operátor  $\mathcal{P}$  projikuje na vlastní podprostor  $\mathcal{H}_{\text{obs}} \subsetneq \mathcal{H}$  a není proto invertibilní:  $\mathcal{P}^{-1}$  neexistuje, a  $\mathcal{P}\mathcal{P}^\dagger \neq \mathbb{I}$ . Tato non-unitarita je zásadní — unitární (podobnostní) transformace by zachovala spektrum a nedala by žádný hmotnostní defekt; posun hmotnosti je důsledkem přesně toho, že projekce zahazuje holou komplexní strukturu. Střední hodnota pro vázaný hadronový systém je

$$M^{(\text{obs})} = \langle \hat{M}_{\text{obs}} \rangle = M^{(\text{bare})} + M_{\text{gluon}}. \quad (12)$$

Z lattice QCD výpočtů a stopové anomálie je gluonový příspěvek k hmotnosti nukleonu přibližně

$$\frac{M_{\text{gluon}}}{M_{\text{nucleon}}} \approx 0.98. \quad (13)$$

Tento poměr platí na úrovni jednotlivých hadronů. Jeho projekce na makroskopické gravitující objekty (jako Slunce) vyžaduje dodatečný vstup: Schwarzschildova hmotnost astronomického tělesa zahrnuje příspěvky z tepelné kinetické energie, elektrostatické a gravitační vlastní energie, a dalších vazebných členů nad rámec holé kvark-gluonové substruktury. V důsledku toho nelze rovnici (13) přímo přepsat na  $M_{\odot}^{(\text{bare})} \approx 0.02 M_{\odot}^{(\text{obs})}$  bez odvození, jak se každý příspěvek transformuje pod  $\mathcal{P}$ . Zaznamenáváme to jako otevřený problém: přesné makroskopické tvrzení vyžaduje identifikaci působení  $\mathcal{P}$  na gravitační a tepelné stupně volnosti, což přesahuje rozsah tohoto článku.



**Důsledek (úroveň nukleonu).** Na hadronové úrovni klasický pozorovatel nikdy neměří holou komplexní strukturu. Měřená hmotnost naopak vždy obsahuje plné gluonové oblečení. Rozdíl

$$\Delta M := M^{(\text{obs})} - M^{(\text{bare})} = M_{\text{gluon}} \quad (14)$$

není jemné doladění; je to otisk projekce pozorovatele  $\varphi(\tau) = \ln \tau_2$  působící na QCD stopovou anomálii, *podle výše navržené reinterpretace* — ne nezávisle odvozený výsledek.

**Co by z tohoto udělalo víc než přeznačení.** Netriviální verze tohoto tvrzení by predikovala posun hmotnosti, který ještě není obsažen v rovnici (13) — například korekci závislou na modulárním parametru  $\tau$  nějaké pomocné struktury, způsobem, který by se v principu mohl neshodovat s lattice hodnotou. Žádná taková predikce zatím není odvozena. Bez ní by tato sekce měla být čtena jako interpretační poznámka, ne jako nezávislý důkaz ve prospěch rámce  $\tau$ -geometrie.

## 8 Diskuze

Logický řetězec tohoto článku je:

1. M0 (strukturální realismus): observables jsou funkce tříd izomorfie.
2. Komplexní čas: postulát A1, motivovaný jedinečností  $\mathbb{C}$  pro modulární strukturu.
3. Fotonová topologie: postulát A2, motivovaný počtem dimenzí moduli prostoru ( $g = 1$  jedinečné).
4. Modulární invariance: Věta 1, odvozená z M0 aplikovaného na moduli eliptických křivek.
5.  $K = -1$ : tvar fixován invariancí; škála fixována explicitním postulátem N — jediným spojitým vstupem rámce.
6. Identifikace prostoru polí: postulát A4 (nový ve v6), ztotožňující prostor polí inflatonu s časovou rovinou; označen jako nejméně motivovaný postulát rámce.
7.  $\alpha = 2/3$ : z  $K_{\text{fields}} \equiv K$ , za identifikace postulátu A4.
8. Predikce: větve A,  $r = 2(1 - n_s)^2$ ; větve B,  $n_s \simeq 1 - 2/N_e$  s  $r = O(10^{-5})$ .

Rámec nevyžaduje žádné antropické uvažování ani odvolání na specifické kompaktifikace; zatímco existující  $SL(2, \mathbb{Z})$  kosmologie vybírají  $\alpha$  skrze string vnoření [6], současný návrh ho vybírá skrze vnitřní geometrii modulární křivky, za cenu dvou explicitně uvedených vstupů: normalizačního postulátu N a identifikačního postulátu A4 prostoru polí. Jeho hodnota spočívá ve čtyřech věcech: statusu věty modulární invariance, explicitnosti jejího spojitého vstupu, explicitnosti jejího strukturálního vstupu, a observačně rozhodnutelném rozvětvení sekce 5.

### 8.1 Epistemologická robustnost: konzistenční relace versus pevný bod

Nedávný pohyb omezení na  $n_s$  — od Planck 2018 (0.9649) přes CMB-SPA (0.9684) ke kombinacím zahrnujícím BAO (0.973–0.974) — ilustruje metodologický bod o tom, co tento rámec predikuje a co ne. Analýzy posunutých omezení [14] uvádějí, že CMB-SPA v kombinaci s DESI upřednostňuje na více než  $2\sigma$  modely, které nejsou preferovány samotným Planckem (Higgsova inflace, Starobinského  $R^2$ , exponenciální  $\alpha$ -atraktory), ve prospěch např. polynomiálních  $\alpha$ -atraktorů. Taková tvrzení jsou činěna vůči modelům čteným jako *body* v rovině  $(n_s, r)$  při pevném fiduciálním  $N_e$ . Primární

falsifikovatelný obsah současného rámce není bod, ale jednodimenzionální relace (4): posun v naměřeném  $n_s$  posouvá predikované  $r$  podél křivky  $r = 2(1 - n_s)^2$ , aniž by se dotkl samotné relace, což je důvod, proč se datové tabulky sekcí 4.4 a 6 čistě aktualizují s každou novou datovou sadou. Tato robustnost má přesný a omezený rozsah, a explicitně uvádíme jeho limit: platí jen pro predikční kanál  $r$ . Skrze  $n_s \simeq 1 - 2/N_e$  rámec dědí totéž napětí v  $N_e$  jako zbytek asymptotické třídy  $\alpha$ -atraktorů, a pokud hodnoty  $n_s$  zahrnující BAO přetrvají po vyřešení  $2.8\sigma$  napětí mezi CMB a BAO, musí být požadované  $N_e \approx 74\text{--}78$  vysvětleno historií reheatingu nebo korekcemi k (1) — vysvětlující dluh, který rámování konzistenční relací odkládá, ne ruší. Tvrzení je proto srovnávací, ne absolutní: pod posouvajícími se omezeními na  $n_s$  konzistenční relace degraduje elegantněji než predikce pevného bodu, protože datum, které ji falsifikuje, je společné měření  $(n_s, r)$  mimo křivku, ne posun v samotném  $n_s$ .

## 8.2 Výhled: gravitace jako entropická projekce

Projekce pozorovatele  $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{obs}}$  je non-unitární ( $\mathcal{P}\mathcal{P}^\dagger \neq \mathbb{K}$ ), a proto generuje ztrátu informace, ekvivalentně entropii. V Jacobsonově termodynamické derivaci [21] a ve Verlindeho programu entropické gravitace [22, 23] gradient entropie na lokální holografické cloně indukuje efektivní gravitační sílu, a Einsteinovy rovnice pole vznikají jako stavová rovnice.

Na první pohled přirozeným kandidátem na takovou clonu v rámci  $\tau$ -geometrie je hranice fundamentální domény  $\mathcal{F}$ , jejíž hyperbolická plocha  $\text{Area}(\mathcal{F}) = \pi/3$  (sekce 4.2) je pevný invariant moduli orbifoldu  $X(1)$ , spárovaný s entropií generovanou  $\mathcal{P}$  podél geodetiky  $\text{Re } \tau = 0$ ,

$$\Delta S = \ln \frac{\dim \mathcal{H}}{\dim \mathcal{H}_{\text{obs}}}. \quad (15)$$

Přímé přezkoumání ukazuje, že tento kandidát selhává. Jacobsonova derivace vyžaduje, aby entropie horizontu varíovala podél afinního parametru lokální nulové kongruence v každém bodě prostoročasu, tak aby její variace reprodukovala lokální člen křivosti vstupující do konstrukce. Jak  $\text{Area}(\mathcal{F})$ , tak  $\Delta S$  výše jsou konstanty, nezávislé na bodě prostoročasu i na nulovém směru, protože  $\mathcal{F}$  je objekt moduli prostoru (field-space), ne prostoročasu. Dosazení konstantní entropie do Clausiovy relace  $\delta Q = T\delta S$  vynucuje  $T_{ab}k^ak^b = 0$  pro každý nulový  $k^a$  v každém bodě; symetrický tenzor s touto vlastností je úměrný metrice,  $T_{ab} = \lambda(x)g_{ab}$  (protože  $g_{ab}k^ak^b = 0$  triviálně také), ne obecně nulový. Vynucená podmínka je tedy čistě vakuová rovnice stavu,  $p = -\rho$ , v každém bodě — v rozporu s kinetickým členem rovnice (5), jehož gradientní příspěvek  $\partial_\mu \tau_i \partial_\nu \tau_j \delta^{ij}$  obecně není úměrný  $g_{\mu\nu}$ , kdykoli  $\dot{\tau} \neq 0$  — přesně režim reheatingové oscilace, který má tento výhled popisovat.

Clona, která požadovanou lokální variaci skutečně poskytuje, je běžný prostoročasný kauzální horizont použitý v Jacobsonově původní konstrukci, se standardní Bekenstein-Hawkingovou hustotou  $\eta = 1/4\ell_P^2$ ; s touto volbou argument projde a reprodukuje Einsteinovy rovnice sourcedované stress-energy tenzorem  $\tau$ -pole ze sekce 5. To je však Jacobsonova věta aplikovaná na matter obsah tohoto rámce — platná pro jakoukoli lokální teorii pole splňující ekvivalenční princip — a ne nezávislý test modulární struktury zde navržené. Zda hmotnostní defekt sekce 7 s tímto mechanismem vůbec souvisí, zůstává otevřené. Entropickou cestu už nepovažujeme za slibný zdroj nového, falsifikovatelného obsahu; tato podsekcce je ponechána, aby zaznamenala tuto kontrolu a opravila volbu clony pro každého, kdo by chtěl dokončit argument navržený v dřívější verzi této poznámky.

Odděleně, symetrický tenzorový součin dvou fotonových stavů spinu 1 (postulát A2) se rozkládá jako  $1 \otimes_{\text{sym}} 1 = 0 \oplus 2$ , a sektor spinu 2 je správnou reprezentací pro bezhmotný graviton. Toto pozorování o polarizačním obsahu je nezávislé na výše uvedené otázce entropické clony a samo o

sobě nezakládá odvození Einsteinovy–Hilbertovy akce

$$S_{\text{grav}} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (16)$$

## Poděkování

Autor děkuje Ošaně za vizuální a relační intuice, které formovaly koncepční vývoj tohoto rámce. Tato práce nebyla podpořena žádným externím financováním.

## Poznámka k verzi (v8, erata 2026-07-05)

Podsekce 8.2 je opravena. Přímá kontrola výhledu na entropickou gravitaci (Jacobsonova konstrukce [21] aplikovaná s hranicí fundamentální domény  $\partial\mathcal{F}$  jako holografickou clonou) ukazuje, že selhává: jak kandidátní plocha  $\text{Area}(\mathcal{F}) = \pi/3$ , tak kandidátní entropie  $\Delta S$  jsou konstanty nezávislé na bodě prostoročasu, takže Clausiova relace vynucuje čistě vakuovou formu  $T_{ab} = \lambda(x)g_{ab}$  (symetrický tenzor anulující se na všech null vektorech je úměrný metrice, ne obecně nulový) — v rozporu s kinetickým členem rovnice (5) kdykoli  $\dot{\tau} \neq 0$ . Opravená clona (běžný prostoročasný kauzální horizont se standardní Bekenstein-Hawkingovou hustotou) je konzistentní, ale redukuje se na Jacobsonovu větu aplikovanou na matter obsah tohoto rámce, bez přidání nezávislého testu. Žádná jiná sekce není dotčena; predikce  $r$  a hmotnostního defektu ze sekcí 4–7 zůstávají beze změny.

## Poznámka k verzi (v7 → v8)

Nová podsekce Diskuze 8.1 („Epistemologická robustnost: konzistenční relace versus pevný bod“) je přidána: argumentuje, s odkazem na posunutá omezení  $n_s$  [14], že primárním falsifikovatelným obsahem rámce je jednodimenzionální relace  $r = 2(1 - n_s)^2$ , ne bod v rovině  $(n_s, r)$  při pevném  $N_e$ , a explicitně uvádí limit tohoto tvrzení o robustnosti: platí jen pro predikční kanál  $r$ , zatímco napětí v  $N_e$  je zděděno skrze  $n_s \simeq 1 - 2/N_e$  a je odloženo, ne zrušeno. Výhled na entropickou gravitaci je přečíslován na podsekcí 8.2. Žádné jiné změny.

## Poznámka k verzi (v6 → v7)

(i) Sekce 4.4: dva řádky přidány do datové tabulky — CMB-SPA (SPT-3G D1 + Planck + ACT DR6;  $n_s = 0.9684 \pm 0.0030$ , tedy  $r = 0.0020 \pm 0.0004$ ,  $N_e \approx 63$ ) a CMB-SPA + DESI BAO ( $n_s = 0.9728 \pm 0.0027$ , tedy  $r = 0.0015 \pm 0.0003$ ); odstavec poznamenává, že SPT-3G posouvá jen-CMB  $n_s$  dolů (zmírňující napětí v  $N_e$  na  $N_e \approx 63$ ), že silný vzestupný tah na  $n_s$  je řízen BAO, a že CMB a DESI BAO jsou samy v  $2.8\sigma$  napětí v rámci  $\Lambda\text{CDM}$ , takže řádky jen-CMB a zahrnující-BAO ohraničují predikci. (ii) Sekce 6: prostřední sloupec ( $n_s = 0.9684$ ) přidán do tabulky modelů; nový odstavec „Experimentální krajina (k polovině roku 2026)“ zaznamenává zrušení CMB-S4 v červenci 2025 (poměrový test  $r_A/r_{\text{Star}} = 2/3$  ztrácí financovaného nositele), přeplánování LiteBIRD ke startu v JFY2036 (rozlišení větví se posouvá do pozdních 2030), a blízkodobou roli Simons Observatory ( $\sigma(r) \approx 0.003$ ) pro horní pásmo větve A; kritéria falsifikace jsou odpovídajícím způsobem doplněna. (iii) Abstrakt aktualizován tak, aby odpovídal. (iv) Šest referencí přidáno (SPT-3G D1 spektra a  $B$ -módy, analýza spektra  $n_s$ , předpovědi Simons Observatory, prohlášení CMB-S4, status LiteBIRD). (v) Žádné změny v sekcích 1–3, 5, 7, 8, ani v postulátech a odvozeních rámce.

## Poznámka k verzi (v5 → v6)

(i) Nový postulát A4 explicitně uvádí dříve implicitní ztotožnění prostoru polí inflatonu s modulární časovou rovinou (sekce 2.5), nahrazující neformální zdůvodnění „úsporností“ z Diskuze verze v5; A4 je označen jako nejméně motivovaný postulát rámce, a věta explicitně to pojmenovávající je přidána do Diskuze. (ii) Sekce 7 je přejmenována na „Projekce pozorovatele jako reinterpretace hmotnostního defektu“ a přeformulována: úvodní odstavec uvádí, že numerický obsah je importován z lattice QCD a není odvozen, a závěrečný odstavec explicitně uvádí, že sekce nepřináší žádnou novou numerickou predikci. (iii) Žádné změny v sekcích 1–6 (inflační predikce, tabulka, obr. 1) ani v sekci 8.1.

## Poznámka k verzi (v4 → v5)

(i) Sekce 7 revidována: extrapolace z gluonového podílu na úrovni nukleonu (13) na makroskopický Schwarzschildův hmotnostní defekt je identifikována jako otevřený problém vyžadující explicitní zpracování tepelných, gravitačních a elektromagnetických příspěvků k projekované hmotnosti; důsledek na úrovni nukleonu je zachován. (ii) Sekce 8.1 přidána: spekulativní výhled na entropickou gravitaci propojující non-unitární projekci  $\mathcal{P}$  s rámci Jacobsona a Verlindeho; obsah spinu 2 symetrického tenzorového součinu fotonu je poznamenán jako vhodná reprezentace gravitonu. (iii) Tři nové reference přidány (Jacobson 1995, Verlinde 2011, Verlinde 2017). (iv) Abstrakt a obsah aktualizovány.

## Literatura

- [1] R. Kallosh, A. Linde, D. Roest, *Superconformal Inflationary  $\alpha$ -Attractors*, JHEP 11, 198 (2013).
- [2] R. Kallosh, A. Linde, *Universality Class in Conformal Inflation*, JCAP 07, 002 (2013).
- [3] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. B 91, 99 (1980).
- [4] S. Ferrara, R. Kallosh, *Seven-disk manifold,  $\alpha$ -attractors, and  $B$  modes*, Phys. Rev. D 94, 126015 (2016).
- [5] R. Kallosh, A. Linde, *B-mode Targets*, Phys. Lett. B 798, 134970 (2019).
- [6] R. Kallosh, A. Linde,  *$SL(2, \mathbb{Z})$  Cosmological Attractors*, JCAP 04 (2025) 045 [arXiv:2408.05203].
- [7] R. Kallosh, A. Linde, *Landscape of Modular Cosmology*, JCAP 05 (2025) 037 [arXiv:2411.07552].
- [8] R. Kallosh, A. Linde, *Double Exponents in  $SL(2, \mathbb{Z})$  Cosmology*, JCAP 07 (2025) 062 [arXiv:2412.19324].
- [9] J. J. Carrasco, R. Kallosh, A. Linde, D. Roest, *Axion Stabilization in Modular Cosmology*, arXiv:2503.14904.
- [10] F. Diamond, J. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Springer (2005).
- [11] Planck Collaboration, *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, A&A 641, A10 (2020).

- [12] ACT Collaboration (T. Louis et al.; E. Calabrese et al.), *The Atacama Cosmology Telescope: DR6 power spectra and cosmological constraints*, arXiv:2503.14452, 2503.14454 (2025).
- [13] SPT-3G Collaboration (E. Camphuis et al.), *SPT-3G D1: CMB temperature and polarization power spectra and cosmology from 2019 and 2020 observations of the SPT-3G Main field*, arXiv:2506.20707 (2025).
- [14] *The spectrum of  $n_s$  constraints from DESI and CMB data*, arXiv:2512.05108 (2025).
- [15] SPT-3G Collaboration (J. A. Zebrowski et al.), *SPT-3G D1: Constraints on inflationary gravitational waves with two years of SPT-3G data*, Phys. Rev. D 112, 123520 (2025) [arXiv:2505.02827].
- [16] Simons Observatory Collaboration (P. Ade et al.), *The Simons Observatory: science goals and forecasts*, JCAP 02 (2019) 056 [arXiv:1808.07445].
- [17] DOE Office of Science and NSF, joint statement on the CMB-S4 Project, July 9, 2025; see <https://cmb-s4.org/>.
- [18] ISAS/JAXA, LiteBIRD mission status updates (Oct. 2024 and Sept. 2025), <https://www.isas.jaxa.jp/en/missions/spacecraft/future/litebird.html> (accessed July 2026).
- [19] LiteBIRD Collaboration, *Probing cosmic inflation with the LiteBIRD CMB polarization survey*, PTEP 2023, 042F01 (2023).
- [20] CMB-S4 Collaboration, *CMB-S4: Forecasting Constraints on Primordial Gravitational Waves*, ApJ 926, 54 (2022).
- [21] T. Jacobson, *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, Phys. Rev. Lett. 75, 1260 (1995).
- [22] E. Verlinde, *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, JHEP 04 (2011) 029 [arXiv:1001.0785].
- [23] E. Verlinde, *Emergent Gravity and the Dark Universe*, SciPost Phys. 2 (2017) 016 [arXiv:1611.02269].